消散型波動方程式に関連する
特異極限問題について

側島基宏　（東京理科大学理工学部数学科）
2021年10月2日　於　熊本大学応用解析セミナー

1. 序

本講演の内容は，池畠良氏（広島大学）との共同研究に基づく． HをHilbert空間とし，Hにおける内積を$(\cdot,\cdot)$，ノルムを$\|\cdot\|$とする．本講演では，以下のような2階の線形微分方程式を考える：

$$\textbf{(P)}_\varepsilon \qquad \begin{cases} \varepsilon u_\varepsilon''(t)+Au_\varepsilon(t)+u_\varepsilon'(t)=0, & t\in[0,\infty), \\ (u_\varepsilon,u_\varepsilon')(0)=(u_0,u_1)\in D(A^{1/2})\times H. \end{cases}$$

ここで，$\varepsilon>0$はパラメータ， AはHにおける非負自己共役作用素であり，その定義域を$D(A)$と表すことにする．この方程式は以下のような消散構造を持つことがすぐにわかる：

$$\frac{d}{dt}\Big(\varepsilon\|u'(t)\|^2+\|A^{1/2}u\|^2\Big)\le -2\|u'(t)\|^2.$$

ここでは，強圧性（coercivity）は満たさないものを念頭に置いていることに注意しておく．というのは，この方程式は $H=L^2(\Omega)$, $A=-\Delta$ $(D(-\Delta)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ とするとよく知られた消散型波動方程式が現れる．強圧性を考慮しないのは，Cauchy問題や外部問題を包含する枠組みで議論するためである．

この問題に対し，Kisyński [**2**]では以下の定理が得られている．

Theorem 1 (Kisyński [**2**]). **(i)** ある正定数C_1が存在し，以下を満たす：

$$\|u_\varepsilon(t)-e^{-tA}u_0\|\le C_1\Big(\varepsilon^{1/2}\|A^{1/2}u_0\|+\varepsilon\|u_1\|\Big),\quad t\ge 0.$$

(ii) $u_0\in D(A)$とすると，ある正定数C_2が存在し，以下を満たす：

$$\|u_\varepsilon(t)-e^{-tA}u_0\|\le C_2\varepsilon\Big(\|Au_0\|+\|u_1\|\Big),\quad t\ge 0.$$

ここで，$\{e^{-tA}\}_{t\ge0}$は$-A$によって生成される（縮小な解析的） C_0-半群である．

これにより，$(\mathrm{P})_\varepsilon$の解u_εの（特異）極限として

$$\lim_{\varepsilon\to+0}u_\varepsilon(t)=e^{-tA}u_0$$

が得られることがわかる．しかし，$v(t)=e^{-tA}u_0$は$(\mathrm{P})_{\varepsilon=0}$を満たさず，特に$u_\varepsilon'(t)$の収束を考える場合には初期層(initial layer)と呼ばれる因子による修正が必要になることが知られている． Lionsは[**5**]において，$(\mathrm{P})_{\varepsilon=0}$から定まる

$$(1) \qquad \begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon''(t)+\theta_\varepsilon'(t)=0, & t\in[0,\infty), \\ (\theta_\varepsilon,\theta_\varepsilon')(0)=(0,Au_0+u_1). \end{cases}$$

を修正に用いれば $\|u'_\varepsilon(t) - (e^{-tA}u_0 + \theta_\varepsilon(t))'\| \to 0 \quad (\varepsilon \to +0)$ が得られることを述べている．この初期層が発生しない$Au_0 + u_1 = 0$の場合の研究としては Ikehata [**3**], Chill–Haraux [**1**]が挙げられる．しかし，この(1)が「修正として妥当か？」という点においては明確な回答は与えられていないように見受けられる．

そこで本講演では，初期値はある程度良いものを考え，u_εのパラメータ$\varepsilon \ll 1$に対する2次の展開を決定することでこの問題にアプローチする．

2. 主結果

主結果は以下の通りである．

Theorem 2 (Ikehata–S.[**4**])**.** $(u_0, u_1) \in D(A^{3/2}) \times D(A^{1/2})$とし，

$$v_\varepsilon(t) = e^{-tA}(Au_0 + u_1) - tA^2 e^{-tA}u_0 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}}(Au_0 + u_1)$$

と定めると，ある正定数 C_2 が存在して次を満たす：

$$\|u_\varepsilon(t) - \varepsilon(e^{-tA}u_0 + v_\varepsilon(t))\| \le C_2\varepsilon^{3/2}\Big(\|A^{3/2}u_0\| + \|A^{1/2}(Au_0 + u_1)\|\Big), \quad t \ge 0.$$

Theorem 2により，u_εに含まれる εオーダーでふるまう成分の抽出に成功した．この証明では，[**6**]において消散型波動方程式の（$t \to \infty$に対する）高次漸近展開を決定するために用いた「解の分解」のアイディアが効果的に働いた．その詳細については時間がある限り講演内で説明したい．

参考文献

[1] R. Chill, A. Haraux, *An optimal estimate for the time singular limit of an abstract wave equation*, Funkcial. Ekvac. **47** (2004), 277–290.

[2] J. Kisyński, Sur les équations hyperboliques avec petit paramètre, Colloq. Math. **10** (1963), 331–343.

[3] R. Ikehata, *L^2-convergence results for linear dissipative wave equations in unbounded domains*, Asymptotic Anal. **36** (2003), 63–74.

[4] R. Ikehata, M.Sobajima, *Singular limit problem of abstract second order evolution equations*, preprint `arXiv:1912.10181`.

[5] J.-L.Lions, "Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal," Lecture Notes in Mathematics, Vol. **323**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. xii+645 pp.

[6] M. Sobajima, *Higher order asymptotic expansion of solutions to abstract linear hyperbolic equations*, Math. Ann. **380** (2021), 1–19.