1次元分数べき Trudinger-Moser 不等式の最大化元の存在・非存在と非斉次制約条件の影響

高橋太　(大阪市立大学・理)*

1. 導入

本講演では実数直線上の分数べき Sobolev 空間 $H^{1/2,2}(\mathbb{R})$ で成り立つ非斉次制約条件付き Li-Ruf 型 Trudinger-Moser 不等式について考察し，その上限値の達成可能性・不可能性と非斉次制約条件との関係について調べる．ここで

$$H^{1/2,2}(\mathbb{R}) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}) : \|u\|^2_{H^{1/2,2}(\mathbb{R})} = \|(-\Delta)^{1/4}u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < \infty\right\}$$

である．$\|(-\Delta)^{1/4}u\|_{L^2(\mathbb{R})}$ は急減少関数に対しては Fourier 変換を用いて定義されるが，Gagliardo セミノルム

$$[u]_{W^{1/2,2}(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}dxdy\right)^{1/2}$$

とは $\|(-\Delta)^{1/4}u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}[u]^2_{W^{1/2,2}(\mathbb{R})}$ の関係がある．

以下では $a, b > 0, \alpha > 0$ に対して非斉次制約条件

$$S_{a,b} = \left\{u \in H^{1/2,2}(\mathbb{R}) : \|(-\Delta)^{1/4}u\|^a_{L^2(\mathbb{R})} + \|u\|^b_{L^2(\mathbb{R})} = 1\right\}$$

を課した Li-Ruf 型 Trudinger-Moser 上限値

$$B_\alpha(a,b) = \sup_{u\in S_{a,b}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right) dx$$

及び Adachi-Tanaka 型 Trudinger-Moser 上限値

$$A(\alpha) = \sup_{\substack{u\in H^{1/2,2}(\mathbb{R})\setminus\{0\} \\ \|(-\Delta)^{1/4}u\|_{L^2(\mathbb{R})}\le 1}} \frac{1}{\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right) dx$$

を定義する．$A(\alpha)$ と $B_\alpha(a,b)$ の関係について，Lam-Lu-Zhang [3] の議論に従って次が示せる．

命題 1 $a, b > 0$ とする．このとき

$$B_\alpha(a,b)\begin{cases} < +\infty & (0 < \alpha \le \pi), \\ = +\infty & (\alpha > \pi) \end{cases} \quad a > 0, 0 < b \le 2 \text{ のとき}$$

$$B_\alpha(a,b)\begin{cases} < +\infty & (0 < \alpha < \pi), \\ = +\infty & (\alpha \ge \pi) \end{cases} \quad a > 0, b > 2 \text{ のとき}$$

* 〒 558-8585 大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138
e-mail: futoshi@sci.osaka-cu.ac.jp

特に

$$B_\pi(a,b) < \infty \overset{\text{iff}}{\iff} 0 < b \le 2$$

である．さらにこのとき次の関係式が成り立つ．

$$B_\pi(a,b) = \sup_{\alpha\in(0,\pi)} \left(\frac{1-(\alpha/\pi)^{a/2}}{(\alpha/\pi)^{b/2}} \right)^{2/b} A(\alpha).$$

以下では $B_\alpha(a,b)$ の達成可能性・不可能性に対する非斉次制約条件の影響について考察する．このタイプの問題は，通常の Li-Ruf 型全空間 TM 上限値に対して O-Sani-Tarsi [4], Ikoma-Ishiwata-Wadade [2] で考察されたものであるが，[4], [2] とは異なり，微分作用素 $(-\Delta)^{1/4}$ の非局所性により，u の台がコンパクトでも $(-\Delta)^{1/4}u$ の台は一般にはコンパクトではなく，[4] で示された集中－消失－コンパクトの交代定理がそのままでは成り立たないという難点がある．

2. 結果

$a > 2$ の場合の以下の定理は [4] の結果の分数べき TM 不等式への拡張である．

定理 2 $a > 2$ とする．このとき
(1) 任意の $b > 0, 0 < \alpha < \pi$ に対して $B_\alpha(a,b)$ は達成される．
(2) 任意の $0 < b < 2$ に対して $B_\pi(a,b)$ は達成される．

次に $a, b > 0$ に対して

$$\alpha_* = \inf\{\alpha \in (0,\pi] : B_\alpha(a,b) \text{ が達成される }\}$$

と定義する．また

$$B_{GN} = \sup_{u\in H^{1/2,2}(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^4_{L^4(\mathbb{R})}}{\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\|(-\Delta)^{1/4}u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} > 0$$

を Gagliardo-Nirenberg 不等式の最良定数とする．Bellazzini-Frank-Visciglia [1] の結果から，B_{GN} はある関数 $u \in H^{1/2,2}(\mathbb{R})$ によって達成されることが既知である．

$0 < a \le 2$ の場合の次の定理は [2] の結果に対応する．

定理 3 $0 < a \le 2, b > 0$ とする．このとき
(1)（小さい α での達成不可能性）
$b > 0$ のとき $\alpha_* > 0$ となる．さらに十分小さい $\alpha > 0$ に対して $B_\alpha(a,b)$ は達成されない．($a = b = 2$ のとき [5])

(2)（$\alpha < \pi$ の場合）
$0 < a \le 2$ が十分 2 に近く，かつ $b \ge 2$ のとき，任意の $\alpha_* < \alpha < \pi$ に対して $B_\alpha(a,b)$ は達成される．

(3)（$\alpha = \pi$ の場合）
$0 < a \le 2$ が十分 2 に近く，かつ $\frac{4}{\pi B_{GN}} < b < 2$ のとき，任意の $\alpha_* < \alpha \le \pi$ に対して $B_\alpha(a,b)$ は達成される．特にこの場合、$B_\pi(a,b)$ は達成される．

証明の方針は以下の通りである．まず対称化の議論より $B_\alpha(a,b)$-最大化列は偶，正，正方向に減少としてよいことに注意する．ここで $\{u_n\} \subset H^{1/2,2}(\mathbb{R})$ が**正規化消失列 (NVS)** であるとは $\{u_n\} \subset S_{a,b}$ かつ

$$(V) \quad \lim_{n\to\infty} \|(-\Delta)^{1/4} u_n\|_2 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_2 = 1$$

が成り立つこととする．また $I_R = (-R,R) \subset \mathbb{R}$ とおくとき，$\{u_n\} \subset H^{1/2,2}(\mathbb{R})$ が**正規化集中列 (NVS)** であるとは $\{u_n\} \subset S_{a,b}$ かつ

$$(C1) \quad \lim_{n\to\infty} \|(-\Delta)^{1/4} u_n\|_2 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_2 = 0$$

$$(C2) \quad \forall R > 0, \exists R_0 \in (0,R)\ s.t.\ \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus I_{R_0}} |(-\Delta)^{1/4} u_n^{R_0}|^2 dx = 0$$

が成り立つこととする．ここに u_n^R は

$$u_n^R(x) = \begin{cases} u_n(x) - u_n(R) & (x \in I_R) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus I_R) \end{cases}$$

で定義される関数だが，u_n が偶，正，正方向に減少なので

$$\|(-\Delta)^{1/4} u_n^R\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|(-\Delta)^{1/4} u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

が成り立つことがわかる．

以下，臨界指数増大度の $\alpha = \pi$ の場合について考える．$B_\pi(a,b)$ の最大化列が最大化元に強収束しない要因は，指数関数の中の係数 $\alpha = \pi$ の臨界性を原因とする集中現象による非コンパクト性と，領域が全空間 $\mathbb{R}$ であることを原因とする消失現象による非コンパクト性の2つであるが，逆にこれら2つの要因を取り除くことで最大化元の存在が示される．

消失現象については，$\{u_n\} \subset S_{a,b}$ を偶，正，減少な正規化消失列とすると

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\pi u_n^2} - 1\right) dx = \pi$$

となる．つまり 正規化消失列 $\{u_n\} \subset S_{a,b}$ のエネルギーレベル は π となることが示される．よって $B_\pi(a,b)$ の値が π より真に大きいときは $B_\pi(a,b)$-最大化列には消失現象は生じない．

一方，正規化集中列の解析を通じて，最大化問題 $B_\alpha(a,b)$ に対しては

- $0 < \alpha < \pi$
- $\alpha = \pi, a > 0, 0 < b < 2$
- $\alpha = \pi, 0 < a << 1, b = 2$

のときには最大化列に集中現象は起こらないことが示される．この意味でこれらのパラメータの範囲は「劣臨界」といえる．

また，定理 3 (3) の条件を $\frac{4}{\pi B_{GN}} < b < 2$ は $B_\pi(a,b) > \pi$（消失レベル）を保証するものだが，

$$Q(x) = \frac{2}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で B_{GN} をテストすることによって示される．ここで Q は方程式

$$(-\Delta)^{1/2} Q + Q - Q^2 = 0 \quad \text{on}\, \mathbb{R}$$

の（平行移動を除いた）一意正値解 (Amic-Toland (Acta, ’91), Frank-Lenzmann (Acta, ’13)) である．

参考文献

[1] J. Bellazzini, R. Frank, and N. Visciglia: *Maximizers for Gagliardo-Nirenberg inequalities and related non-local problems,* Math. Ann. 360, (2014), 653–673.

[2] N. Ikoma, M. Ishiwata, and H. Wadade: *Existence and non-existence of maximizers for the Moser-Trudinger type inequalities under inhomogeneous consutraints,* Math. Ann. 373, no.1-2, (2019), 831–851.

[3] N. Lam, G. Lu, and L. Zhang: *Equivalence of critical and subcritical sharp Trudinger-Moser-Adams inequalities,* Rev. Mat. Iberoam. 33, no.4, (2017), 1219–1246.

[4] J. do Ó, F. Sani, and C. Tarsi: *Vanishing-concentration-compactness alternative for the Trudinger-Moser inequality in* $\mathbb{R}^N$, Coomun. Contemp. Math. 1650036, (2018), 27 pages.

[5] F. Takahashi: *Critical and subcritical fractional Trudinger-Moser type inequalities on* $\mathbb{R}$, Advances in Nonlinear Anal. 8, no.1, (2019), 868–884.