$\exp(\Phi)_2$-量子場モデルに付随する放物型確率偏微分方程式について

星野 壮登（大阪大学 大学院基礎工学研究科）

本講演の内容は，河備浩司氏（慶應義塾大学），楠岡誠一郎氏（京都大学）との共同研究 [4, 5] に基づく．

1　研究の背景

$\mathbb{R}^d$ の領域 Λ とポテンシャル関数 $U:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について

$$\rho_U(d\phi)=\frac{1}{\Gamma}\exp\left[-\int_\Lambda U(\phi(x))dx\right]\mu(d\phi),\qquad \phi\in\mathcal{D}'(\Lambda)$$

と書かれる確率測度を構成しようという問題がある．μ は平均がゼロで Green 関数 $(1-\Delta)^{-1}$ を共分散とするような，超関数空間 $\mathcal{D}'(\Lambda)$ 上の Gauss 測度である．また Γ は正規化定数である．このような確率測度 ρ_U は，Euclid 化された場の量子論と深く関係している．この確率測度 ρ_U の動的なモデル，すなわち ρ_U を不変測度としてもつような Markov 過程を構成しようという問題が，Parisi と Wu [6] によって提唱された「確率過程量子化」である．このような Markov 過程は，形式的には次の確率偏微分方程式の解として構成される．

$$\partial_t\Phi=\frac{1}{2}(\Delta-1)\Phi-U'(\Phi)+\xi.$$

ここで ξ は「時空ホワイトノイズ」と呼ばれる，平均がゼロで共分散 $\mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(s,y)]=\delta(t-s)\delta(x-y)$ を持つ Gauss 型確率変数の族である．この方程式の解 Φ のエルゴード性を示すことで，確率測度 ρ_U の性質を調べることができる．

ただ，$d\geq 2$ の場合は Φ は真に超関数に値を取る確率変数となってしまい，$U'(\Phi)$ を文字通り定義することはできない．そこで，不都合な項を取り除く「繰り込み」という操作が必要になる．$d=2, U(\phi)=\phi^{2m}$ $(m\in\mathbb{N})$ の場合は，Albeverio と Röckner [1] や Da Prato と Debussche [2] によって解が構成されている．$d=3, U(\phi)=\phi^4$ の場合は，Hairer [3] の「regularity structure の理論」による構成などがある．

2 問題と主結果

本講演では，次の方程式の解の定義と時間大域的可解性を議論する．

$$\partial_t \Phi = \frac{1}{2}(\Delta - 1)\Phi - \frac{\alpha}{2} : \exp(\alpha\Phi) : + \xi, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{T}^2. \tag{1}$$

ここで $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ であり，α は固定した実数である．すなわち，次のような確率測度に付随した確率過程量子化方程式である．

$$\rho_{\exp}(d\phi) = \frac{1}{\Gamma} \exp\left[- \int_{\mathbb{T}^2} : \exp(\alpha\phi(x)) : dx \right] \mu(d\phi), \qquad \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2). \tag{2}$$

前述の通り Φ は真に超関数に値を取るので，非線形項 $\exp(\alpha\phi)$ から不都合な項を取り除く繰り込みが必要である．$: \exp(\alpha\phi) :$ は繰り込みを施された非線形項を表し，形式的には次のように書かれる．

$$: \exp(\alpha\phi) : = \exp\left(\alpha\phi - \frac{\alpha^2}{2}\infty \right).$$

本講演では次の結果について報告する．

定理 1 ([4, 5]) $\alpha^2 < 8\pi$ とする．このとき確率測度 (2) は *well-defined* である．また $\rho_{\exp}(\mathcal{O}) = 1$ となる可測集合 $\mathcal{O}$ が存在し，任意の $\phi \in \mathcal{O}$ に対して，$\Phi|_{t=0} = \phi$ となるような方程式 (1) の時間大域解が確率 1 で一意的に存在する．

References

[1] S. Albeverio and M. Röckner: *Stochastic differential equations in infinite dimensions: Solutions via Dirichlet forms*, Probab. Theory Relat. Fields **89** (1991) pp. 347–386.

[2] G. Da Prato and A. Debussche: *Strong solutions to the stochastic quantization equations*, Ann. Probab. **31** (2003), pp. 1900–1916.

[3] M. Hairer: *A theory of regularity structures*, Invent. Math. **198** (2014), pp. 269–504.

[4] M. Hoshino, H. Kawabi and Sei. Kusuoka: *Stochastic quantization associated with the* $\exp(\Phi)_2$*-quantum field model driven by space-time white noise on the torus*, J. Evol. Equ. **21** (2021), pp. 339–375. (Original version: `arXiv:1907.07921`.)

[5] M. Hoshino, H. Kawabi and Sei. Kusuoka: *Stochastic quantization associated with the* $\exp(\Phi)_2$*-quantum field model driven by space-time white noise on the torus in the full* L^1*-regime*, preprint (2020), `arXiv:2007.08171`.

[6] G. Parisi and Y.S. Wu: *Perturbation theory without gauge fixing*, Sci. Sinica **24** (1981), pp. 483–496.