# The global well-posedness for the compressible fluid model of Korteweg type

村田　美帆　(神奈川大学 工学部 数学教室)

## 1. 導入

圧縮性粘性流体の運動を表す方程式の初期値問題について考える.

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^N, t\in(0,T), \\ \rho(\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \operatorname{Div}\mathbf{T} + \nabla P(\rho) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^N, t\in(0,T), \\ (\rho,\mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_* + \rho_0, \mathbf{u}_0) & \text{in } \mathbf{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $\mathbf{u} = (u_1(x,t),\dots,u_N(x,t))$, $\rho = \rho(x,t)$ はそれぞれ流速, 密度を表す未知関数とする. $P(\rho)$ は圧力とし, 密度の関数として表されるもの, すなわちバロトロピック流体を考えることとし $P\in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ を仮定する. $\rho_*$ は正定数, $\rho_0=\rho_0(x)$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(x)$ は既知の関数とする. また $\mathbf{T} = (T_{ij})$ は応力テンソルとし, $\operatorname{Div}\mathbf{T} = \left(\sum_{j=1}^N \partial_j T_{1j},\dots,\sum_{j=1}^N \partial_j T_{Nj}\right), \partial_j = \partial/\partial x_j$. 応力テンソル $\mathbf{T}$ が次の粘性による応力テンソル

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) + (\nu-\mu)\operatorname{div}\mathbf{u}\mathbf{I}$$

で与えられるとき, (1) は圧縮性 Navier-Stokes 方程式と呼ばれる. ただし, $\mu$, $\nu$ は粘性係数, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \{\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\}/2$, $\mathbf{I}$ は $N\times N$ の単位行列とする. 一方, $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ に次の Korteweg 応力テンソル

$$\mathbf{K}(\rho) = \frac{\kappa}{2}(\Delta\rho^2 - |\nabla\rho|^2)\mathbf{I} - \kappa\nabla\rho\otimes\nabla\rho$$

を加え, $\mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}(\rho)$ とするとき, (1) は Navier-Stokes-Korteweg 方程式 (以下, NSK 方程式) と呼ばれる. 本講演では NSK 方程式について考察する.

NSK 方程式は相転移を伴う現象を記述するモデルとして Dunn and Serrin [3] によって数学的に定式化された. 全空間において十分小さな初期値に対し NSK 方程式を考察した結果として Hattori and Li [4], Tan, Wang and Xu [6], Danchin and Desjardins [2], Kobayashi and Tsuda [5], Chikami and Kobayashi [1] などがある. [4] は時間 $L_2$, 空間 $L_2$ 枠で考察し, 初期値を $(\rho_0,\mathbf{u}_0)\in H^{s+1}\times H^s$ $(s\geq N/2+3)$ からとり時間大域的適切性を得た. [6] は3次元の場合に $(\rho_0,\mathbf{u}_0)\in(H^2\times H^1)\cap L_1$ に対し時間大域的適切性と $L_2$ における解の減衰評価を得た. [5] は初期値を $(\rho_0,\mathbf{u}_0)\in(H^{s+1}\times H^s)\cap L_1$ $(s\geq[N/2]+1)$ からとり, $L_\infty$, $L_2$, $L_1$ における解の減衰評価を示した. また, [2] は斉次ベゾフ空間 $\dot{B}^{N/2}_{2,1}\cap\dot{B}^{N/2-1}_{2,1}\times\dot{B}^{N/2-1}_{2,1}$ に初期値をとり時間大域的適切性を示し, [1] により解の減衰評価が得られた.

本講演の目標は, NSK 方程式を $\mathbf{R}^N (3\leq N\leq 7)$ で考え, 定数状態 $(\rho_*,0)$ のまわりで十分小さな初期値に対する時間大域解の一意存在性を次の条件下で示すことである.

$$\mu>0,\quad \mu+\nu>0,\quad \kappa>0,\ \ P'(\rho_*)>0,\quad \frac{1}{4}\left(\frac{\mu+\nu}{\rho_*}\right)^2\neq\rho_*\kappa. \tag{2}$$

本研究は柴田良弘教授 (早稲田大学) との共同研究に基づく.

## 2. 主結果

主定理を述べるために次のノルムと関数空間を導入する.

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u}]_{q,\ell,t} &= \sup_{0\le s\le t} < s >^{\ell} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{L_q(\mathbf{R}^N)},\\
[\nabla\mathbf{u}]_{q,\ell,t} &= \sup_{0\le s\le t} < s >^{\ell} \|\nabla\mathbf{u}(\cdot,s)\|_{L_q(\mathbf{R}^N)},\\
\| < s >^{\ell} \mathbf{u}\|_{L_p((0,t),X)} &= \left(\int_0^t (< s >^{\ell} \|\mathbf{u}(\cdot,s)\|_X)^p\,ds\right)^{1/p},\\
W_q^{m,\ell}(\mathbf{R}^N) &= \{(f,\mathbf{g}) \mid f\in W_q^m(\mathbf{R}^N),\ \ \mathbf{g}\in W_q^{\ell}(\mathbf{R}^N)^N\},\\
\|(f,\mathbf{g})\|_{W_q^{m,\ell}(\mathbf{R}^N)} &= \|f\|_{W_q^m(\mathbf{R}^N)} + \|\mathbf{g}\|_{W_q^{\ell}(\mathbf{R}^N)},\\
\mathcal{N}(\rho,\mathbf{u})(t) &= \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{2}\{[(\nabla^j\rho,\nabla^j\mathbf{u})]_{\infty,\frac{N}{q_1}+\frac{j}{2},t}\\
&\quad + [(\nabla^j\rho,\nabla^j\mathbf{u})]_{q_1,\frac{N}{2q_1}+\frac{j}{2},t} + [(\nabla^j\rho,\nabla^j\mathbf{u})]_{q_2,\frac{N}{2q_2}+1+\frac{j}{2},t}\\
&\quad + \| < s >^{\ell_i} (\rho,\mathbf{u})\|_{L_p((0,t),W_{q_i}^{3,2}(\mathbf{R}^N))}\\
&\quad + \| < s >^{\ell_i} (\partial_s\rho,\partial_s\mathbf{u})\|_{L_p((0,t),W_{q_i}^{1,0}(\mathbf{R}^N))}\}.
\end{aligned}
$$

ただし, $X$ は Banach 空間, $< s >= (1+s)$, $\ell_1 = N/2q_1 - \delta$, $\ell_2 = N/2q_2 + 1 - \delta$, $\delta$ はあとで定める正定数とする.

以下が本講演の主定理である.

**定理 1.** 条件 (2) と $3\le N\le 7$ を仮定し, $q_1$, $q_2$, $p$ は次を満たすとする.

$$
2<p<\infty,\ \ q_1<N<q_2,\ \ 2<q_1\le 4,\ \ \frac{1}{q_1}=\frac{1}{q_2}+\frac{1}{N},\ \ \frac{2}{p}+\frac{N}{q_2}<1.
$$

また, $\delta$ は次を満たすとする.

$$
\frac{1}{p}<\delta<\frac{N}{q_2}+\frac{1}{p}.
$$

このとき, ある定数 $\epsilon>0$ が存在して,

$$
\rho_0\in\cap_{i=1}^2 B_{q_i,p}^{3-2/p}(\mathbf{R}^N)\cap W_{q_1/2}^1(\mathbf{R}^N), \mathbf{u}_0\in\cap_{i=1}^2 B_{q_i,p}^{2(1-1/p)}(\mathbf{R}^N)^N\cap L_{q_1/2}(\mathbf{R}^N)^N,
$$

$$
\sum_{i=1}^{2}\|(\rho_0,\mathbf{u}_0)\|_{B_{q_i,p}^{3-2/p}(\mathbf{R}^N)\times B_{q_i,p}^{2(1-1/p)}(\mathbf{R}^N)} + \|(\rho_0,\mathbf{u}_0)\|_{W_{q_1/2}^1} < \epsilon
$$

を満たす初期値 $(\rho_0\,\mathbf{u}_0)$ に対して, NSK 方程式は次の $L_p$-$L_q$ 最大正則性が成り立つクラスで一意解 $(\rho,\mathbf{u})$ をもつ.

$$
\begin{aligned}
&\rho-\rho_*\in L_p((0,\infty),W_{q_2}^3(\mathbf{R}^N))\cap W_p^1((0,\infty),W_{q_2}^1(\mathbf{R}^N)),\\
&\mathbf{u}\in L_p((0,\infty),W_{q_2}^2(\mathbf{R}^N)^N)\cap W_p^1((0,\infty),L_{q_2}(\mathbf{R}^N)^N).
\end{aligned}
$$

さらに次の評価を満たす.

$$
\mathcal{N}(\rho-\rho_*,\mathbf{u})(\infty)\le C\epsilon.
$$

ここで $C$ は $\epsilon$ に依存しない正定数とする.

**注意 2.** (1) 次元に関する条件について: $N=2$ のとき, $q_1<2$ より $q_1/2<1$ となるため, 本研究の手法では時間大域解を得ることができない. また $q_1\leq 4$ より, $N<8$ の制限が必要となる.
(2) $L_p$-$L_q$ 最大正則性が成り立つクラスで考察する理由: $L_2$ 枠に比べ初期値の正則性を緩和することができるため. また, 有界領域では指数減衰する解の存在が期待できるが, 非有界領域では多項式減衰評価のみ得られると考えられる. この減衰評価を得るためには時間指数 $p$ は空間指数 $q$ と独立に十分大きくとる必要がある.

## 参考文献


[1] N. Chikami and T. Kobayashi, *Global well-posedness and time-decay estimates of the compressible Navier-Stokes-Korteweg system in critical Besov spaces*, J. Math. Fluid Mech. **21** (2019), no. 2, Art. 31.

[2] R. Danchin and B. Desjardins, *Existence of solutions for compressible fluid models of Korteweg type*, Ann. Inst. Henri Poincare Anal. Nonlinear, **18** (1) (2001) 97–133.

[3] J. E. Dunn and J. Serrin, *On the thermomechanics of interstital working*, Arch. Ration. Mech. Anal., **88** (2) (1985) 95–133.

[4] H. Hattori and D. Li, *Golobal solutions of a high dimensional systems for Korteweg materials*, J. Math. Anal. Appl., **198** (1) (1996) 84–97.

[5] T. Kobayashi and K. Tsuda, *Global existence and time decay estimate of solutions to the compressible Navier-StokesKorteweg system under critical condition*, (2019), preprint, arXiv:1905.03542.

[6] Z. Tan, H. Q. Wang, and J. K. Xu, *Global existence and optimal $L^2$ decay rate for the strong solutions to the compressible fluid models of Korteweg type*, J. Math. Anal. Appl., **390** (2012) 181–187.