Transitions of blow-up mechanisms in k-equivariant harmonic map heat flow

関　行宏　　(大阪市立大学数学研究所 特任助教)*1
Biernat Paweł　(Bonn 大学)

k, d を自然数とする．単位球面 $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ に値をとる調和写像流 $F(\cdot, t) : \mathbf{R}^d \to \mathbb{S}^d$,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F + |\nabla F|^2 F, \quad t > 0. \tag{1}$$

において k-equivariant map と呼ばれる

$$F(x,t) = \left(\Omega_k\left(\frac{x}{r}\right)\sin u(r,t), \cos u(r,t)\right), \qquad r = |x|, \tag{2}$$

という形の解を探すと, スカラー値の半線形熱方程式

$$\partial_t u = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{k(d+k-2)}{2r^2}\sin(2u), \qquad r > 0, t > 0 \tag{3}$$

が得られる．ただし, $\Omega_k(\omega) : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$ はエネルギー密度一定の調和写像, いわゆる harmonic eigenmap である．$r = 0$ では $|\nabla F| < \infty$ を要請するため, 境界条件 $u(0,t) = 0$ を課す．方程式 (3) は $\sup_{r>0}\left|u_0(r)/r^k\right| < \infty$ を満たす任意の有界な関数 $u_0(r)$ に対して滑らかな時間局所解 $u = u(r,t)$ を持ち, 従って (2) を通じて元の変数 $F(x,t)$ に対して (1) の解が得られる．また, エネルギー密度に関して以下の等式が成り立つ:

$$|\nabla F|^2 = (\partial_r u)^2 + \frac{k(d+k-2)}{r^2}\sin^2 u. \tag{4}$$

境界条件 $U_1(0) = 0$, $\lim_{r\to 0} U_1(r)/r^k = 1$ を満たす (3) の定常解 $U_1(r)$ は $d > d^*(k) := 2 + (2 + 2\sqrt{2})k$ のとき, 次の漸近展開を持つ:

$$U_1(r) = \frac{\pi}{2} - hr^{-\gamma} + O\left(r^{-\gamma-\omega}\right) \qquad (r \to \infty). \tag{5}$$

ここで $h > 0$ はある定数で, γ, ω はそれぞれ

$$\gamma = \frac{d-2-\omega}{2}, \qquad \omega = \sqrt{(d-2)^2 - 4k(d-2) - 4k^2} \tag{6}$$

で定義される正の定数である．$d^*(1) = 4 + 2\sqrt{2} = 6.82... \in (6,7)$ である．

$k = 1$, $d \geq 7$ のとき, すべての爆発は Type II であるが [3], 証明は背理法によるため具体的な爆発の速さは一般には分かっていない．[1] では $k = 1$, $d \geq 7$ として具体的な爆発の速さの評価や各点評価を持つ解の存在を証明した．詳しくは $2\ell > \gamma$ を満たす任意の自然数 ℓ に対して $\|(u_\ell)_r(\cdot,t)\|_\infty \approx (T-t)^{-\ell/\gamma}$ $(t \nearrow T)$ を満たす爆発解 u_ℓ が存在する．ℓ は赤道調和写像における線形化作用素の**安定**固有値に対応する．このような解はある意味で安定である [4].

本研究は科研費 (課題番号:18K03373) の助成を受けたものである．

*1 〒558-8585　大阪市住吉区杉本 3 − 3 − 138 大阪市立大学数学研究所
e-mail: seki@sci.osaka-cu.ac.jp

$d=7$ のとき $\omega=1$, $\gamma=2$ となり, 上記 ℓ の条件は $\ell>1$ となる. 本研究の第一の目的は $(k,d)=(1,7)$ の場合に, [1] で得られた解とは異なり, **ゼロ固有値**に対応する爆発構造を持つ解を構成することである. 第二の目的はその結果を $k\geq 2$, $d>d^*(k)$ の場合へ一般化することだが, **(6) の定数 γ と次元 d の関係によっては $k=1$ では見られなかった爆発構造を持つ解も存在する** [2]. この意味で爆発構造の不連続的な遷移が見られる.

定理 1. $k\geq 1$ とし, $d>d^*(k)$, $2n_0=\gamma$ $(n_0\in\mathbb{N})$ とする [1]. $M>0$ は任意, $\theta\in(0,1)$ は十分小さい定数とする. このとき, 以下の各点評価を満たす爆発解 u が存在する:

$$u(r,t)\sim$$
$$\begin{cases} U_1\left(\dfrac{r}{\varepsilon(s)\sqrt{T-t}}\right) & (r\leq\varepsilon(s)^\theta\sqrt{T-t}); \\ \dfrac{\pi}{2}-D\varepsilon(s)^\gamma\left(\dfrac{r}{\sqrt{T-t}}\right)^{-\gamma}L_{n_0}^{(\omega/2)}\left(\dfrac{r^2}{4(T-t)}\right)(=:u^*(r,t)) & \left(\varepsilon(s)^\theta\leq\dfrac{r}{\sqrt{T-t}}\leq M\right)\end{cases}$$
$$s=-\log(T-t).$$

ここで $\varepsilon(s)$ は $s\to\infty$ で

$$\varepsilon(s)=\begin{cases} O\left(s^{-1/\omega}\right) & (4\gamma>d-2) \\ O\left(s^{-1/2\gamma}\right) & (4\gamma<d-2)\end{cases} \tag{7}$$

を満たすある正値関数, $D>0$ はある定数, $L_n^{(\nu)}(z)$ は n 次 Laguerre 陪多項式を表す.

定理 2. 定理 1 と同じ仮定の下で, $u(r,t)$, $U_1(r/\varepsilon(s)\sqrt{T-t})$, $u^*(r,t)$ に対応する k-equivariant maps をそれぞれ F, F_1, F^* で表す. このとき任意の $K, M, L>0$ に対して

$$\sup_{\xi\leq K}\varepsilon(s)^2(T-t)\left|\left(|\nabla F|^2-|\nabla F_1|^2\right)\left(\xi\varepsilon(s)\sqrt{T-t},t\right)\right|\to 0 \quad \text{as } t\nearrow T \tag{8a}$$

$$\sup_{L\leq y\leq M}\frac{(T-t)}{\varepsilon(s)^{2\gamma}}\left|\left(|\nabla F|^2-|\nabla F^*|^2\right)\left(y\sqrt{T-t},t\right)\right|\to 0 \quad \text{as } t\nearrow T \tag{8b}$$

系 3. 定理1と同じ仮定の下で, 以下の評価が成り立つ:

$$\frac{C}{\varepsilon(s)^2(T-t)}\leq\|\nabla F(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2\leq\frac{C'}{\varepsilon(s)^2(T-t)} \tag{9}$$

証明は接合漸近展開を基礎とし, [5] で藤田方程式に対して開発した技法を用いる.

参考文献

[1] P. Biernat and Y. Seki, *Type II blow-up mechanism for supercritical harmonic map heat flow*, Int. Math. Res. Not., (IMRN) **2** (2019), 407–456.

[2] ———, *Transitions of blow-up mechanisms in supercritical harmonic map heat flow*, submitted.

[3] P Bizon and A Wasserman, *Nonexistence of Shrinkers for the Harmonic Map Flow in Higher Dimensions*, Int. Math. Res. Not., (IMRN) **17** (2015), 7757–7762.

[4] T.-E. Ghoul, S. Ibrahim, and V. T. Nguyen, *On the stability of type II blowup for the 1-corotational energy-supercritical harmonic heat flow*, Anal. PDE **12** (2019), 113–187.

[5] Y. Seki, *Type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with critical Joseph–Lundgren exponent*, J. Funct. Anal. **275** (2018), 3380–3456.

[1] 各 $k=1,2,...$ に対してそのような組 $(d,n_0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ は必ず存在する.