# Blow up of solutions for a fourth order parabolic equation with gradient nonlinearlity

三宅 庸仁 (東北大学大学院理学研究科博士２年)

本講演では, 勾配型の非線形項をもつ四階放物型方程式に対する次の初期値問題を考える:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^2 u = -\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u), & x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}
$$

ただし, $N \geq 1$, $p > 2$ とする. 表面拡散を表す $(-\Delta)^2 u$ に勾配型非線形項を付した四階放物型方程式は, 薄膜のエピタキシャル成長を記述する数理モデルに現れる ([5]). その数理モデルに対して King-Stein-Winkler ([3]) は, 対応するエネルギー汎関数の下からの有界性を利用して, 時間大域解の存在などを示している. 問題 (P) も同様に, 汎関数

$$
E(w) := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} (\Delta w)^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla w|^p \, dx
$$

に対する $L^2$-勾配流とみなすことができる. しかし, $p > 2$ であることから汎関数 $E(\cdot)$ は次の性質をもつ:

$$
E(\lambda w) \to -\infty \quad \text{as} \quad \lambda \to \infty \quad \text{for} \quad w \in H^2(\mathbf{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \setminus \{0\}.
$$

本研究の目的は, 汎関数 $E$ が下に非有界であることから予想される, 最大存在時間 $T_M$ が有界となるような解の存在と, $T_M < \infty$ なる解の時刻 $T_M$ における振る舞いを調べることである.

本講演では, 上述の動機に従い, 問題 (P) の有限時間爆発解の存在とその挙動に関して得られた結果を述べる. また, 問題 (P) が時間大域解をもつための指数 $p$ 及び初期値 $\varphi$ の十分条件について得られた結果も紹介する. さらに, [1] において考察された unstable Cahn-Hilliard 方程式と問題 (P) との関係に基づき, 問題 (P) には, 勾配爆発解と呼ばれる, $\nabla u$ のみ発散し $u$ 自身は有界に留まるような解の存在が期待される事にも言及する. なお, 本講演の内容は石毛和弘先生 (東京大学) と岡部真也先生 (東北大学) との共同研究 ([2]) に基づく.

主定理を述べるために必要な記号と言葉を定義する. $G = G(x,t)$ を作用素 $\partial_t + (-\Delta)^2$ に対する $\mathbf{R}^N \times (0,\infty)$ 上の基本解とする. 基本解 $G$ と $f \colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ との合成積を

$$
[S(t)f](x) := \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y) f(y) \, dy, \quad x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0,
$$

と定める. また, 関数 $F_p \colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ を $F_p(\xi) := |\xi|^{p-2}\xi$ と定義する. 問題 (P) の解と最大存在時間を次で定める.

**定義 1.** $T > 0$ を定数, $\varphi\colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を可測関数とする.

(i) $u \in C((0,T]; BC^1(\mathbf{R}^N))$ が任意の $(x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,T]$ に対して

$$u(x,t) = [S(t)\varphi](x) - \int_0^t \nabla \cdot [S(t-s)F_p(\nabla u(\cdot,s))](x)\,ds$$

をみたすとき, $u$ を $\mathbf{R}^N \times [0,T]$ 上における問題 (P) の解と呼ぶ.

(ii) $u$ を $\mathbf{R}^N \times [0,T]$ 上における問題 (P) の解とする. $u$ の最大存在時間 $T_M = T_M(u)$ を

$$T_M(u) := \sup\left\{ \tau > T \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathbf{R}^N \times [0,\tau] \text{ 上における問題 (P) の解 } U_\tau \text{ で} \\ \mathbf{R}^N \times (0,T] \text{ 上 } u \equiv U_\tau \text{ をみたすものが存在する} \end{array} \right\}$$

と定める.

次に, 一様局所弱 $L^r$ 空間を定義する.

**定義 2.** $r \in [1,\infty]$, $\rho > 0$ とし, $f$ を $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数とする. このとき,

$$\|f\|_{r,\rho} := \begin{cases} \displaystyle\sup_{x\in\mathbf{R}^N} \sup_{s>0} s^{\frac{1}{r}-1} \int_0^s (f\chi_{B(x,\rho)})^*(\tau)\,d\tau & \text{if} \quad r \neq \infty, \\ \|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} & \text{if} \quad r = \infty, \end{cases}$$

と定める. ここで, $\chi_{B(x,\rho)}$ は中心 $x$ 半径 $\rho$ の開球に対する特性関数とし, $(f\chi_{B(x,\rho)})^*$ は $f\chi_{B(x,\rho)}$ の単調減少再配列関数とする. $\|\cdot\|_{r,\rho}$ を用いて, 一様局所弱 $L^r$ 空間 $L^{r,\infty}_{\mathrm{uloc}}(\mathbf{R}^N)$ を

$$L^{r,\infty}_{\mathrm{uloc}}(\mathbf{R}^N) := \{ f\colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R} \mid \|f\|_{r,1} < \infty \}$$

と定める.

まず, 最大存在時間が有界であるような解が存在するための初期値の十分条件を述べる.

**定理 1** ([2])**.** $\varphi \in H^2(\mathbf{R}^N)$ は $\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} < \infty$ かつ $E(\varphi) < 0$ をみたすとする. このとき, $T_M(u) < \infty$ なる問題 (P) の解 $u$ が存在する.

定理 1 は, 問題 (P) の近似問題を考え, 対応するエネルギーに対して concavity argument (cf. [4]) を適用することで証明する. 次に, 最大存在時間 $T_M$ が有界である解の時刻 $T_M$ における挙動に関する結果を述べる.

**定理 2** ([2])**.** $T_M(u) < \infty$ なる問題 (P) の解 $u$ に対し, 以下の評価が成り立つ :

(i) $N \geq 1$ かつ $p > 2$ のとき, $r \geq r_1 := N(p-2)/2$ をみたす任意の $r \in [1,\infty]$ について

$$\liminf_{t \nearrow T_M} (T_M - t)^{\frac{1}{2(p-2)} - \frac{N}{4r}} \|\nabla u(t)\|_{r,(T_M-t)^{\frac{1}{4}}} > 0.$$

(ii) $N \geq 1$ かつ $2 < p \leq 4$ のとき, $r \geq r_2 := N(p-2)/(4-p)$ をみたす任意の $r \in [1,\infty]$ について

$$\liminf_{t \nearrow T_M} (T_M - t)^{\frac{4-p}{4(p-2)} - \frac{N}{4r}} \|u(t)\|_{r,(T_M-t)^{\frac{1}{4}}} > 0.$$

**注意 1.** (i) 問題 (P) は任意の定数関数が定常解となる．したがって定理 1, 2-(ii) から，$2<p<4$ の場合, 問題 (P) に対して比較原理が成立しない．この比較原理の破綻が本研究で得られた爆発現象に本質的な影響を与えるものと考えられる．

(ii) $u$ を初期値 $\varphi$ に対する問題 (P) の解とする．このとき, $\lambda>0$ に対して

$$u_\lambda(x,t):=\lambda^{\frac{4-p}{p-2}}u(\lambda x,\lambda^4 t),\quad \varphi_\lambda(x):=\lambda^{\frac{4-p}{p-2}}\varphi(\lambda x),$$

と定めると, $u_\lambda$ は初期値 $\varphi_\lambda$ に対する問題 (P) の解となる．また,

$$\|\nabla\varphi_\lambda\|_{r_1,1}=\|\nabla\varphi\|_{r_1,\lambda},\quad \|\varphi_\lambda\|_{r_2,1}=\|\varphi\|_{r_2,\lambda}$$

が成り立つ．

定理 2 の証明には $L^{r,\infty}_{\rm uloc}(\mathbf{R}^N)$ 上で逐次近似的に構成した解の life span 評価を用いる．この評価では, 基本解 $G$ との合成積 $S(t)f$ に対する $L^{r,\infty}_{\rm uloc}(\mathbf{R}^N)$ 上の $L^p$-$L^q$ 型評価と, 注意 1-(ii) で述べたスケール変換が重要な役割を担う．また, ここで得られた life span 評価を用いることで問題 (P) の時間大域解が構成できる．

## 参考文献


[1] J. D. Evans, V. A. Galaktionov and J. F. Williams, *Blow-up and global asymptotics of the limit unstable Cahn-Hilliard equation*, SIAM J. Math. Anal. **38** (2006), 64–102.

[2] K. Ishige, N. Miyake and S. Okabe, *Blow up for a fourth order parabolic equation with gradient nonlinearity*, SIAM J. Math. Anal., to appear.

[3] B. B. King, O. Stein and M. Winkler, *A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth*, J. Math. Anal. Appl. **286** (2003), 459–490.

[4] H. A. Levine, Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t=-Au+\mathscr{F}(u)$, Arch. Rational Mech. Anal. **51** (1973), 371–386.

[5] A. Zangwill, *Some causes and a consequence of epitaxial roughening*, Journal of Crystal Growth **163** (1996), Proceedings of the US-Japan Joint Seminar on Atomic Scale Mechanisms of Epitaxial Growth, 8–21.