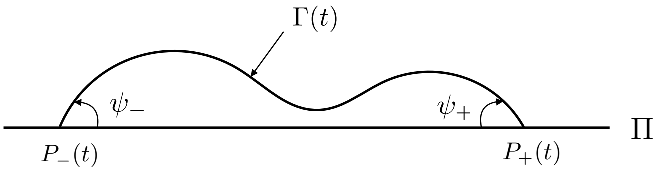
# 接触角条件つき表面拡散に対する進行波解の非一意性と非凸性について*

可香谷　隆（九州大学，マス・フォア・インダストリ研究所）†

## 1　導入

本講演の内容は，神戸大学の高坂良史氏との共同研究に基づくものである．本講演では，以下の表面拡散に対する自由境界値問題を考察する．$\Pi$ を $\mathbb{R}^2$ の $x$ 軸とし，$t$ を時刻を表すパラメータとする滑らかで単純な平面曲線の族 $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ に対し，$V$ を法線速度，$s$ を弧長パラメータ，$\kappa$ を曲率とする．$\Gamma(t)$ の挙動は以下の方程式 (P) を満たすものとする．

$$
\begin{aligned}
&V = -\kappa_{ss} \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \\
&P_{\pm}(t) \in \Pi, && \text{(BC2)} \\
&\sphericalangle(\Gamma(t), \Pi) = \psi_{\pm} \quad \text{at} \quad P_{\pm}(t), && \text{(BC2)} \\
&\kappa_s = 0 \quad \text{at} \quad P_{\pm}(t).
\end{aligned}
$$




ただし，$P_+(t)$ と $P_-(t)$ は，それぞれ $\Gamma(t)$ の右端点，左端点とする．また，$\sphericalangle(\Gamma(t), \Pi)$ は $\Gamma(t)$ と $\Pi$ が囲む領域における接触角とし，$\psi_{\pm} \in (0, \pi/2)$ はそれぞれ時刻に依らない定数で，異なる値も許すとする．本研究での目標は，上記の表面拡散に対し，解の漸近挙動を明らかにすることである．

ここで，幾つか関連する先行研究について述べる．自由境界条件 (BC2) と (BC2) を課した曲線流は，これまで主に，2 階放物型偏微分方程式に対応する，曲線短縮流 ($V = \kappa$)[1]，外力項付き曲率流 ($V = \kappa + 1$)[2]，面積保存型曲率流 ($V = \kappa - \int_{\Gamma(t)} \kappa\, ds / \int_{\Gamma(t)}\, ds$)[5] 等が研究対象とされてきた．ここでは特に，表面拡散と変分構造が類似する面積保存型曲率流についてのみ述べる．以降，左右の端点を $\Pi$ 上に持つ平面曲線 $\Gamma$ に対し，$A(\Gamma)$ を $\Gamma$ と $\Pi$ で囲まれた領域の (符号付) 面積とする．上記のような接触角条件付きの表面拡散と面積保存型曲率流は，それぞれ，$\Gamma$ に対する汎関数

$$E(\Gamma) := L(\Gamma) + l_+(\Gamma)\cos\psi_+ - l_-(\Gamma)\cos\psi_-$$

の形式的な $H^{-1}$ 勾配流，面積 $A(\Gamma)$ 保存条件下における $L^2$ 勾配流として導出できる．ただし，$L(\Gamma)$ は $\Gamma$ の長さ，$l_{\pm}(\Gamma)$ は，それぞれ右端点と左端点の $x$ 座標とする．従って，いずれの解 $\{\Gamma_t\}$ に対しても，$A(\Gamma(t))$ が保存量で，$E(\Gamma(t))$ は広義単調減少関数となる．変分構造により，$E(\Gamma)$ の面積保存条件下における極小解の安定性が期待できるが，簡単な変分計算により，$\psi_+ \neq \psi_-$ の時，$E(\Gamma)$ は面積保存条件下における臨界点を持たないことがわかる．従って，いずれの方程式においても，上記の変分構造による考察だけでは，解の漸近挙動が非自明である．一方，接触角条件付き面積保存型曲率流 (AP) に対するグラフ表示できる解の漸近挙動は，[5] により解析されており，進行波解が局所指数安定性を持つことが示されている．以上より，(P) の解の漸近挙動の解析を見据え，(P) に対する進行波解の解析を本講演の目標とする．尚，[3, 5] により，(AP) に対するグラフ表示できる進行波解は，拡大・縮小と，平行移動を除いて一意であり，上に狭義凸であることが示されている．

---

*本研究は高坂良史氏 (神戸大学) との共同研究である

†E-mail: kagaya@imi.kyushu-u.ac.jp

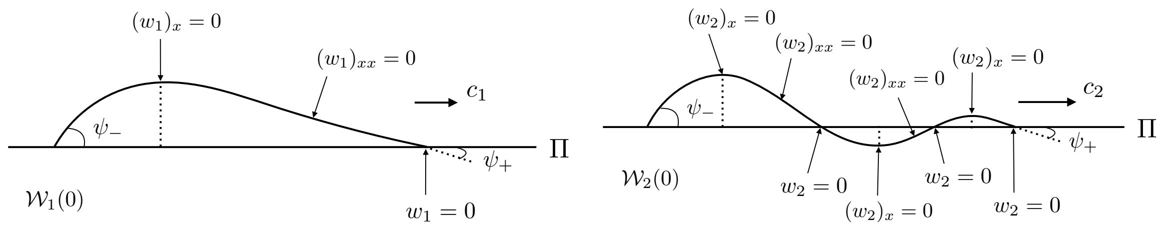



図 1: $k = 1, 2$ に対する $\mathcal{W}(0)$ の形状

## 2 主結果

主結果を述べるため，まず，進行波解を定義する．本講演で扱う方程式 (P) に対する時間大域的な滑らかな解のうち，ある平面曲線 $\mathcal{W}(0)$ と定数 $c$ が存在し，

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(0) + ct\vec{e}_1 \quad \text{for} \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

と記述できる解を進行波解とする．任意の進行波解 $\mathcal{W}(t)$ と定数 $a \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ に対し，(2.1) 内のプロファイル曲線 $\mathcal{W}(0)$ と速度 $c$ を，それぞれ $\lambda\mathcal{W}(0) + a\vec{e}_1$ と $c/\lambda^3$ に置き直しても進行波解が構成できる．従って，$L(\mathcal{W}(0)) = 1$ で $P_-(0)$ が原点となる進行波解を考察すれば十分であり，以下の定理内の進行波解はそれらの条件を満たすものとする．また，以下で述べる進行波解は，$\mathcal{W}(0)$ がグラフ表示されるものに限る．

**Theorem 2.1** ([4]). *(i)* 任意の進行波解 $\mathcal{W}(t)$ に対し，速度 $c$ は以下を満たす．

$$\psi_- \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \psi_+ \quad \Longleftrightarrow \quad c \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0.$$

*(ii)* 任意の接触角条件に対して，少なくとも *1* つは進行波解 $\mathcal{W}(t)$ が存在する．
*(iii)* $\psi_+ = \psi_-$ の時，任意の進行波解 $\mathcal{W}(t)$ に対し，$\mathcal{W}(0)$ は円弧で，$c = 0$ となる．
*(iv)* $\psi_+ < \psi_-$ とする．この時，$\psi_-$ に依存した正の実数列

$$\psi_- > m_1 > m_2 > \cdots > m_n > \cdots$$

が存在し，以下が成り立つ：$\psi_+ \in [m_{j+1}, m_j)$ の時，少なくとも $2j-1$ 個の，以下を満たす進行波解 $\mathcal{W}_k(t)(k = 1, 2, \cdots 2j-1)$ が存在する．ただし，$\mathcal{W}_k(0)$ は，関数 $w_k(x)(0 \leq x \leq l_k)$ によってグラフ表示されているものとする．

*(a)* $\mathcal{W}_k(t)$ の速度 $c_k$ は，以下を満たす．

$$0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{2j-1}.$$

*(b)* $w_k(x)$ は原点近傍で正で，$(w_k)_{xx}(0) < 0$ となる (接触角条件より，$(w_k)_x(0) > 0$).

*(c)* $0 < x < l_k$ に於いて，$x$ 軸方向に対して順に，$(w_k)_x, (w_k)_{xx}, w_k$ の符号が変わる．さらに，$k$ が奇数 *(*偶数*)* の時，それらの零点の個数はそれぞれ $k$ 個 *(*$k+1$ 個*)*，$k$ 個 *(*$k$ 個*)*，$k-1$ 個 *(*$k$ 個*)* である *(*図 *1* 参照*)*.

尚，$\psi_+ > \psi_-$ の場合でも定理 2.1(iv) と同様に $c_k < 0$ となる進行波解が構成できるが，ここでは省略する．また，定理 2.1(iii) により，$\psi_+ = \psi_-$ の時は，接触角条件を満たす円弧が一意であることから，進行波解の一意性，及び凸性が成り立つことがわかる．一方で，定理 2.1(iv) により，一方の接触角が十分に小さい時，進行波解の一意性，及び凸性が成り立たないことがわかる．

# 参考文献


[1] X. Chen and J.-S. Guo, *Motion by curvature of planar curves with end points moving freely on a line*, Math. Ann. **350** (2011), no. 2, pp. 277–311.

[2] J.-S. Guo, H. Matano, M. Shimojo and C.-H. Wu, *On a free boundary problem for the curvature flow with driving force*, Arch. Ration. Mech. Anal. **219** (2016), no. 3, pp. 1207–1272.

[3] T. Kagaya and Y. Kohsaka, *A note on traveling waves for area-preserving geometric flows*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[4] T. Kagaya ant Y. Kohsaka, *Existence of non-convex traveling waves for surface diffusion of curves with constant contact angles*, to appear in Arch. Ration. Mech. Anal.

[5] M. Shimojo and T. Kagaya, *Exponential stability of a traveling wave for an area preserving curvature motion with two endpoints moving freely on a line*, Asymptot. Anal. **96** (2016), no. 2, pp. 109–134.