外力項付き平均曲率流の弱解の存在について

高棹 圭介　(京大理/白眉センター)*

1. 導入

$T>0$, dを2以上の整数, $\Omega=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$, $g:\Omega\times[0,T)\to\mathbb{R}$を滑らかな既知関数とし, 任意の$t\in[0,T)$に対して$U_t\subset\Omega$を滑らかな境界$M_t:=\partial U_t$を持つ開集合とする. M_tの法速度ベクトルが

$$v=h+gn \qquad \text{on } M_t,\quad t\in(0,T) \tag{1}$$

を満たすとき, $\{M_t\}_{t\in[0,T)}$を外力項付き平均曲率流と呼ぶ. ここでh, nはそれぞれM_tの平均曲率ベクトル, 内向き単位法線ベクトルである. gが定数のときは, (1)は結晶成長の方程式として知られている. 本講演では, gが滑らかではないときの(1)の弱解の存在性について考察する.

2. フェイズフィールドモデル

$T,\varepsilon>0$, $W(s)=(1-s^2)^2/2$とおく. 本講演では以下のAllen-Cahn方程式を考える:

$$\begin{cases}\varepsilon\varphi^\varepsilon_t=\varepsilon\Delta\varphi^\varepsilon-\dfrac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}-(g^\varepsilon+\varepsilon^{-\gamma}r^\varepsilon)\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \varphi^\varepsilon(x,0)=\varphi^\varepsilon_0(x), & x\in\Omega.\end{cases} \tag{2}$$

ここで, $\gamma\in(0,\frac{1}{2})$, g^εは$\sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,T)}|\nabla g^\varepsilon(x,t)|\le\varepsilon^{-\gamma}$を満たす滑らかな関数, $r^\varepsilon(x,t):=\varepsilon\tanh^{-1}(\varphi^\varepsilon(x,t))$である. さらに, $|\varphi^\varepsilon|\ge 1$のときは$r^\varepsilon$が定義できないため, $\max_{x\in\Omega}|\varphi^\varepsilon_0|<1$を仮定する. これと最大値原理により$r^\varepsilon$はwell-definedとなる. 本講演では, (2)の$\varepsilon\to0$としたときの解の特異極限が(1)の弱解になることを示す.

注意 1. $g^\varepsilon\equiv0$, $\varepsilon\to0$としたとき, (2)の解のゼロレベルセット$M^\varepsilon_t=\{x\in\Omega\,|\,\varphi^\varepsilon(x,t)=0\}$は平均曲率流の弱解に収束することが知られている(例えば[1]参照). $\varepsilon^{-\gamma}r^\varepsilon\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}$は後述の補題5を成り立たせるために付け加えた項である. r^εがM^ε_tの符号付距離関数の近似とみなせることから, $\varepsilon^{-\gamma}r^\varepsilon\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}$は$M^\varepsilon_t$の近傍ではほぼ0だといえ, 実際, 本講演における弱解の枠組では, $\varepsilon\to0$としたとき消える項となっている.

3. 主結果

まず, 本講演で考察する弱解の定義を述べる.

定義 2 (L^2-flow)**.** $T>0$とし, $\{\mu_t\}_{t\in(0,T)}$をΩ上のRadon測度, $d\mu:=d\mu_t dt$とする. 以下が成り立つとき, $\{\mu_t\}_{t\in(0,T)}$をL^2-flowとよぶ:

1. 殆ど至る所の$t\in(0,T)$に対し, μ_tは$(d-1)$-integral, 即ち, $(d-1)$-rectifiableな集合M_tと関数$\theta_t:M_t\to\mathbb{N}$が存在して$d\mu_t=\theta_t d\mathcal{H}^{d-1}\lfloor_{M_t}$が成り立つ. ここで$d\mathcal{H}^{d-1}\lfloor_{M_t}$は$M_t$に対する$(d-1)$-次元Hausdorff測度である. さらに,

$$\int_\Omega \mathrm{div}_{T_x\mu_t}\, g\, d\mu_t=-\int_\Omega h\cdot g\, d\mu_t,\qquad \forall g\in(C^1_c(\Omega))^d$$

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 理学研究科
e-mail: k.takasao@math.kyoto-u.ac.jp

を満たす$h \in L^2(\mu_t;\mathbb{R}^d)$(一般化された平均曲率ベクトル)が殆ど至る所の$t \in (0,T)$に対して存在する．ここで$T_x\mu_t$は$\mu_t$の$x$における概接平面である．

2. 定数$C_T > 0$とベクトル値関数$v \in L^2(0,T;(L^2(\mu_t))^d)$(一般化された速度ベクトル)が存在して

$$v(x,t) \perp T_x\mu_t \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } (x,t) \in \Omega \times (0,T),$$

$$\Big|\int_0^T \int_\Omega (\eta_t + \nabla\eta \cdot v)\, d\mu_t dt\Big| \le C\|\eta\|_\infty, \quad \forall \eta \in C_c^1(\Omega \times (0,T)) \tag{3}$$

が成り立つ．

$d = 2,3$, $q \in (2,\infty)$, $p \in [\frac{2d}{d+1},\infty) \cap (\frac{dq}{2(q-1)},\infty)$, $\Psi_\delta \in C_c^\infty(B_\delta(0))$をデルタ列, $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$, $\{T_i\}_{i=1}^\infty$をそれぞれ$\delta_i \to 0$, $T_i \to \infty$を満たす正の点列とする．$g \in L^q_{loc}([0,\infty);W^{1,p}(\Omega))$に対して, 正の点列$\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$を$\varepsilon_i \to 0$, $\sup_{\Omega\times[0,T_i]}|\nabla g^{\varepsilon_i}| \le \varepsilon_i^{-\gamma}$が成り立つように選ぶ．ここで$g^{\varepsilon_i} := \Psi_{\delta_i} * g$である．この決め方から

$$g^{\varepsilon_i} \to g \quad \text{in } L^q_{loc}([0,\infty);W^{1,p}(\Omega))$$

を得る．φ^{ε_i}を, $\varepsilon = \varepsilon_i$, $T = T_i$としたときの(2)の解とする．$\sigma := \int_{-1}^1 \sqrt{2W(s)}\, ds$とし, Ω上のRadon測度$\mu_t^{\varepsilon_i}$を

$$\mu_t^{\varepsilon_i}(\phi) := \frac{1}{\sigma}\int_\Omega \phi(x)\Big(\frac{\varepsilon_i|\nabla\varphi^{\varepsilon_i}(x,t)|^2}{2} + \frac{W(\varphi^{\varepsilon_i}(x,t))}{\varepsilon_i}\Big)dx, \qquad \phi \in C_c(\Omega)$$

で定める．

定理 3 ([3]参照)**.** $d = 2,3$, $q \in (2,\infty)$, $p \in [\frac{2d}{d+1},\infty)\cap(\frac{dq}{2(q-1)},\infty)$, $g \in L^q_{loc}([0,\infty);W^{1,p}(\Omega))$とする．$U_0 \subset \Omega$を, C^1級の境界M_0を持つ開集合とする．このとき, 関数列$\{\varphi_0^{\varepsilon_i}\}_{i=1}^\infty$が存在し, $\varphi_0^{\varepsilon_i}$を初期値とする(2)の解$\varphi^{\varepsilon_i}$及び$\varphi^{\varepsilon_i}$によって定義される$\mu_t^{\varepsilon_i}$について以下が成り立つ:

1. 部分列$\{\varepsilon_{i_j}\}_{j=1}^\infty$, $(d-1)$-integralなRadon測度の族$\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$が存在して

$$\int_\Omega \phi\, d\mu_t^{\varepsilon_{i_j}} \to \int_\Omega \phi\, d\mu_t, \quad \forall\, \phi \in C_c(\Omega),\ \forall\, t \ge 0, \quad \mu_0 = \mathcal{H}^{d-1}\lfloor_{M_0}.$$

2. ベクトル値関数$\tilde{g} \in L^2_{loc}(0,\infty;(L^2(\mu_t))^d)$が存在して, $\{\mu_t\}_{t\in(0,\infty)}$は一般化された速度ベクトル

$$v(x,t) = h(x,t) + \tilde{g}(x,t)$$

を持つL^2-flowである． さらに, $\operatorname{spt}\tilde{g} \subset \partial^*\{(x,t)\,|\,\psi(x,t) = 1\}$ かつ関数$\theta : \partial^*\{(x,t)\,|\,\psi(x,t) = 1\} \to \mathbb{N}$が存在して

$$\tilde{g} = \frac{1}{\theta}gn \qquad \mathcal{H}^d\text{-a.e. on } \partial^*\{(x,t)\,|\,\psi(x,t) = 1\},$$

が成り立つ．ここで$\psi = \lim_{j\to\infty}\varphi^{\varepsilon_{i_j}}$, $n(\cdot,t)$は$\partial^*\{\psi(\cdot,t) = 1\}$の内向き単位法線ベクトルである．

注意 4. 仮定 $p \in (\frac{dq}{2(q-1)}, \infty)$ は以下の意味で自然である: $\lambda > 0$ とし, $\tilde{x} = \dfrac{x}{\lambda}$, $\tilde{t} = \dfrac{t}{\lambda^2}$ による, 放物型方程式に対する通常のリスケーリングを考える. g は M_t の速度に対応していることと, $\dfrac{\tilde{x}}{\tilde{t}} = \lambda \dfrac{x}{t}$ より $\tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \lambda g(x,t)$ と定める.

$$\Big(\int_0^\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^p dx \Big)^{\frac{q}{p}} dt \Big)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{\frac{d}{p} + \frac{2}{q} - 2} \Big(\int_0^\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_{\tilde{x}} \tilde{g}|^p d\tilde{x} \Big)^{\frac{q}{p}} d\tilde{t} \Big)^{\frac{1}{q}}$$

であることから, $\frac{d}{p} + \frac{2}{q} - 2 < 0$, 即ち $p \in (\frac{dq}{2(q-1)}, \infty)$ のとき, 外力項は (1) の摂動とみなせる. 移流項付き平均曲率流 $v = h + u^\perp$ に対しては [4] で同様の結果を得ているが, 証明の鍵となっている $|\nabla r^\varepsilon|$ の評価の方法が異なる.

4. Key lemma

$|\nabla \varphi^\varepsilon| \neq 0$ のとき, $v^\varepsilon := \frac{-\varphi_t^\varepsilon}{|\nabla \varphi^\varepsilon|} \frac{\nabla \varphi^\varepsilon}{|\nabla \varphi^\varepsilon|}$ とおく. これは M_t^ε の速度ベクトルの近似になっている. $\sup_{\varepsilon \in (0,1)} (\mu_0^\varepsilon(\Omega) + \|g^\varepsilon\|_{L^q((0,T);W^{1,p}(\Omega))}) \leq D$ を満たす $D > 0$ が存在すると仮定すると, T, D のみに依存する $C, C' > 0$ が存在して, 任意の $\eta \in C_c^1(\Omega \times (0,T))$ に対し以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T \int_{\{|\nabla \varphi^\varepsilon| \neq 0\}} (\eta_t + \nabla \eta \cdot v^\varepsilon) \, d\mu_t^\varepsilon dt \Big| \\ \leq & C\|\eta\|_\infty + C' \|\nabla \eta\|_\infty \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \right| \, dxdt. \end{aligned}$$

よって, (3) を示すには

$$\int_0^T \int_\Omega \left| \frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \right| \, dxdt \to 0 \tag{4}$$

を示す必要がある. この証明には, 以下の補題を用いる.

補題 5. (2) の解 φ^ε に対し, $\max_{x \in \Omega} |\varphi_0^\varepsilon(x)| < 1$, $\max_{x \in \Omega} |\nabla r^\varepsilon(x, 0)| \leq 1$ とする. このとき, $\max_{x \in \Omega, t \in [0,T]} |\nabla r^\varepsilon(x,t)| \leq 1$ が成り立つ.

注意 6. $|\nabla r^\varepsilon| \leq 1$ と $\frac{\varepsilon |\nabla \varphi^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} \leq 0$ が同値であることから, 補題 5 が (4) の証明に有用であることが分かる. 補題 5 は, Ilmanen [2] で得られたものを $g \not\equiv 0$ の場合に一般化したものであり, 証明には関数 $w^\varepsilon = |\nabla r^\varepsilon|^2 - 1$ に対する最大値原理を用いる.

参考文献

[1] L. C. Evans, H. M. Soner and P. E. Souganidis, *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 1097–1123.

[2] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom., **38** (1993), 417–461.

[3] K. Takasao, *Existence of weak solution for mean curvature flow with transport term and forcing term*, to appear in Comm. Pure Appl. Anal.

[4] K. Takasao and Y. Tonegawa, *Existence and regularity of mean curvature flow with transport term in higher dimensions*, Math. Ann. **364** (2016), 857–935.