半線形分数冪拡散方程式の解の時間大域挙動について

山本　征法　(新潟大学)[*1]
Franz Achleitner　(University of Vienna)[*2]
Ansgar Jüngel　(Vienna Institute of Technology)[*3]

1. 導入

次の移流拡散方程式の初期値問題を考える. ただし, $n \geq 2,\ 0 < \alpha \leq 1$ とする:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + (-\Delta)^{\alpha/2}\rho - \nabla\cdot(\rho\nabla\psi) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi = \rho, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \geq 0, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

初期データに滑らかさや小ささを仮定すれば, 時間大域解の存在を保証出来る ([6, 8]). 特に, 初期データに可積分性を仮定すれば解は正値性および

$$\|\rho(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-n/\alpha} \tag{2}$$

を満たす. また, 線形の基本解を $G_\alpha(t,x) = (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^\alpha}](x)$ と書くと, $\|\rho(t) - MG_\alpha(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = o(1)$ $(t\to\infty)$ が成り立つ. すなわち解の $t\to\infty$ での漸近形は MG_α で与えられる. さらに, $x\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ を仮定すると, シャープな評価 $\|\rho(t) - MG_\alpha(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-1/\alpha})$ $(t\to\infty)$ が得られる. 一方, 空間遠方での挙動を評価すると, 線形の基本解が $|x|^{n+\alpha}G_\alpha(t,x) \to C_\alpha t$ $(|x|\to+\infty)$ を満たすことから [2], 解 ρ の空間遠方での減衰が同程度に遅いことが分かる. このことから当然 $x\rho(t) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ である. したがって, 上の仮定 $x\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ の妥当性には疑問が残る. 実際には, より弱い仮定の下で次の評価が成り立つ.

定理 1 ([1]) $n \geq 2,\ 0<\alpha\leq 1,\ \alpha < n/2$ とする. $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ かつ, ある $q > n/\alpha$ に対して $|x|^n\rho_0 \in L^q(\mathbb{R}^n)$ とする. 解 ρ が (2) を満たすとすると, $\|\rho(t) - MG_\alpha(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+\alpha t)^{-1/2}$ が成り立つ.

定理の評価はシャープではない. 一方, 条件 $|x|^n\rho_0 \in L^q(\mathbb{R}^n)$ において q は任意に大きなものを選べる. すなわち, 空間遠方での減衰の観点から, この仮定は強いものではない. なお, 任意の $q > n/\alpha$ について $|x|^n G_\alpha \in L^q(\mathbb{R}^n)$ である.

2. 準備と主定理証明の概要

定理の証明にはエントロピー法を用いる. エントロピー法は発展方程式の解の適切性や滑らかさ, さらに時間大域挙動を知る上で有用な手法として古くからあ

[*1] 〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050　新潟大学大学院自然科学研究科
e-mail: `masakazu@eng.niigata-u.ac.jp`
[*2] Oskar Morgenstern Platz 1, 1090 Wien
[*3] Wiedner Hauptstraße 8-10, 1040 Wien

らゆる場面で活用されている [3, 4, 7]．まず解のスケールを変換して $u(t,x) = \frac{e^{nt}}{M}\rho(\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}, e^t x)$ とすると，Fokker-Planck型の方程式

$$\partial_t u + (-\Delta)^{\alpha/2} u = \nabla\cdot(xu) + Me^{-(n-\alpha)t}\nabla\cdot(u\nabla\phi), \quad -\Delta\phi = u \tag{3}$$

が得られる．次に，対応する定常問題 $(-\Delta)^{\alpha/2}u = \nabla\cdot(xu)$ の解を $u_\infty(x) = G_\alpha(1/\alpha, x)$ として，$v = u/u_\infty$ の p-エントロピー

$$E_p\left[v\right](t) = \int_{\mathbb{R}^n} v^p u_\infty dx - \left(\int_{\mathbb{R}^n} v u_\infty dx\right)^p$$

を定める．まず $E_p[\frac{u}{u_\infty}]$ の可積分性を保証する．

命題 2 定理と同じ仮定の下，(1) の解は $\||x|^n\rho(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(1+t)^{n/\alpha q}$ を満たす．

証明はエネルギー法による．なお，評価の時間への依存度はシャープである．実際 $\||x|^n G_\alpha(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = t^{n/\alpha q}\||x|^n G_\alpha(1)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ である．この命題と $u_\infty(x)$ の性質から $1 < p < 1 + \frac{n}{\alpha q}$ について $E_p[\frac{u}{u_\infty}]$ の可積分性が分かる．さらに $E_p[\frac{u}{u_\infty}]$ は，可積分であれば次の減衰評価を満たす．

命題 3 定理と同じ仮定の下で $1 < p < 2$ に対し $E_p[\frac{u}{u_\infty}](t) \le C_p e^{-\alpha t}$ が成り立つ．

この命題の証明には対数Sobolev不等式を用いる [1, 5]:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} D_p\left(v(t,x), v(t,x+y)\right)\nu_\infty(dy)u_\infty(x)dx \ge E_p[v](t).$$

ただし $\nu_\infty(dy) = dy/\alpha|y|^{n+\alpha}$，$D_p(a,b) = a^p - b^p - pb^{p-1}(a-b)$．命題3とCsiszár-Kullbackの不等式より $\|u(t) - u_\infty\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le Ce^{-\alpha t/2}$．スケールを元に戻せば定理1の評価が得られる．命題3の証明において，(3) の非線形項に由来する項を評価する際に，係数にある指数減衰 $e^{-(n-\alpha)t}$ が重要な役割を果たす．同様の構造は，自己相似性をもつ多くの半線形拡散方程式で見られる．例えば準地衡近似方程式や一般化Burgers方程式などが同様の構造を持つが，これらの方程式の時間大域解についても，同様にエントロピー法によって漸近評価が得られる．

参考文献

[1] Achleitner, F., Jüngel, A., Yamamoto, M., Nonlinear Anal. **179** (2019), 270–293.

[2] Blumenthal, R.M., Getoor, R.K., Trans. Amer. Math. Soc., **95** (1960), 263–273.

[3] Carrillo, J. A., Jüngel, A., Markowich, P.A., Toscani, G., Unterreiter, A., Monatsh. Math. **133** (2001), 1–82.

[4] Chafaï, D., J. Math. Kyoto Univ. **44** (2004), 325–363.

[5] Gentil, I., Imbert, C., Asymptot. Anal. **59** (2008), 125–138.

[6] Li, D., Rodrigo, J.L., Zhang, X., Rev. Mat. Iberoam. **26** (2010), 295–332.

[7] Misawa, M., Nonlinear Anal. **50** (2002), 485-494.

[8] Sugiyama, Y., Yamamoto, M., Kato, K., J. Differential Equations **258** (2015), 2983–3010.